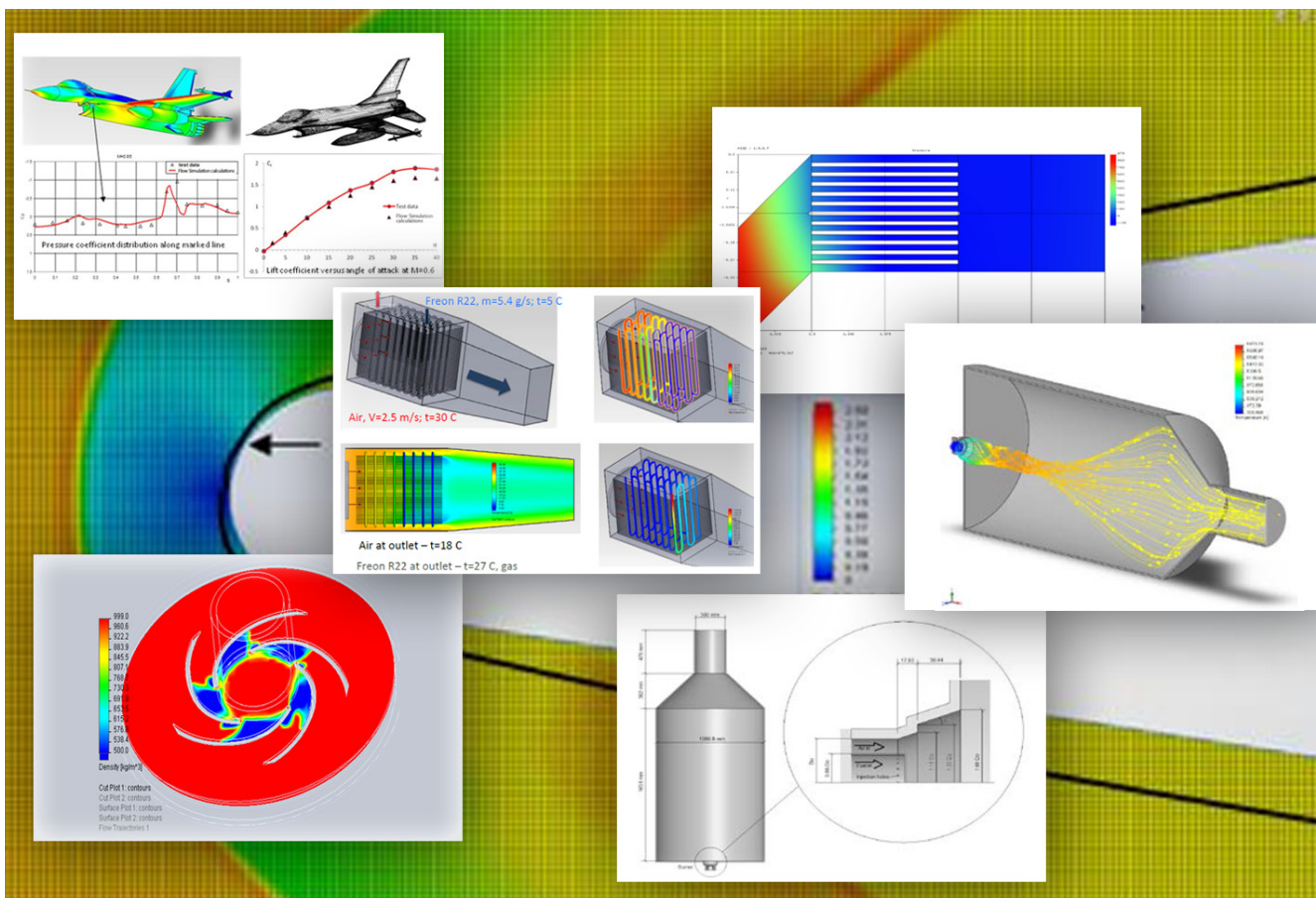


# Base numérique de la CFD intégrée à la CAO

*Livre blanc*



**FÉVRIER 2014**

**Auteurs :**  
 Dr A. Sobachkin,  
 Dr G. Dumnov,  
 (Mentor Graphics  
 Corporation, division  
 Mechanical Analysis, Russie)

Dr A. Sobachkin,  
 Engineering Manager

## THEME

### Intégration CAO et Simulation : maillage et intégration de l'analyse dans le processus de conception

## RESUME

SOLIDWORKS Flow Simulation est une nouvelle classe de logiciels (appelée CFD simultanée) d'analyse CFD (Computational Fluid Dynamics, calcul de la mécanique des fluides) entièrement intégrée dans l'environnement de conception mécanique, pour toutes applications d'ingénierie.

Tous les logiciels CFD incluent une représentation des équations Navier-Stokes, des modèles de turbulence pour des phénomènes physiques. La complexité des codes CFD s'est accrue depuis le début des années 1980, notamment en ce qui concerne la modélisation physique, sans toutefois accorder autant d'importance à la complexité géométrique. Parallèlement, les systèmes de CAO mécanique sont devenus indispensables dans le processus de création des produits dans presque tous les secteurs industriels. Ce qui permet de construire des géométries très complexes avec une certaine facilité. En 1999, SOLIDWORKS a introduit la première version de FloWorks, offrant ainsi pour la première fois des capacités de simulation CFD dans un système de CAO mécanique, utilisant directement la géométrie CAO native sans modification, comme point de départ du processus CFD. Dès lors, des outils intégrés ou associés aux outils de CAO ont fait leur apparition. Ces outils utilisent des technologies numériques différentes du CFD traditionnel qui vont de la génération de maillage à la différenciation de modèles et au traitement de parois. Pourtant, les publications relatives à leur fonctionnement interne demeurent assez peu nombreuses. Ce document examine en profondeur les fondations numériques de SOLIDWORKS Flow Simulation, précédemment appelé FloWorks.

L'idée s'appuie sur le choix de la technologie de maillage SOLIDWORKS Flow Simulation et sur l'impact que la sélection d'un maillage cartésien a sur la façon dont la géométrie est traitée, notamment les interfaces solide-fluide et solide-solide, le traitement des parois utilisé pour capturer l'évolution de la couche limite et le calcul de la friction en surface et des flux thermiques. Le traitement des parois minces et des coques stratifiées pose des problèmes spécifiques.

Enfin, nous montrons comment les modèles de maillage rectiligne et de couche limite ont été étendus par un ensemble de modèles physiques couvrant : les gaz réels, les flux supersoniques et hypersoniques, l'ébullition, les processus de cavitation et de condensation. Les modèles de radiation qui prennent en compte des caractéristiques spectrales seront aussi présentés brièvement.

## Mots-clés

Simulation, CFD, EFD, SOLIDWORKS Flow Simulation, Intégration à la CAO, maillage, technologie de maillage, modèles numériques, solveur, analyse d'ingénierie, étude de dynamique des fluides, multiphysique.

## 1. INTRODUCTION

Dans la pratique de la conception moderne, les concepts de gestion du cycle de vie du produit (PLM) sont largement déployés par les ingénieurs de nombreuses industries comme moyen par lequel les données relatives aux produits fabriqués en 3D sont utilisées et maintenues cohérentes pendant tout le cycle de vie du produit et à travers toutes ses modifications de conception. Un concept PLM a pour base la disponibilité de données, relatives au modèle de produit 3D, de haute qualité, complètes, détaillées et précises dans un système de CAO mécanique qui constitue l'élément central. Aujourd'hui, les données relatives au modèle 3D constituent donc à la fois la fondation et le point de départ de tous les prototypages virtuels et des simulations physiques. L'utilisation des simulations d'écoulement des fluides à l'aide du calcul de mécanique des fluides (CFD) dans un tel contexte d'intégration à l'outil CAO est évidemment très attractive dans la mesure où elle permet non seulement d'accélérer le processus de conception, mais également de rendre ce processus plus prévisible et fiable et ce, malgré un environnement caractérisé par la complexification de la conception et la dépendance à l'égard de partenaires de développement externes. Il est essentiel de noter que tous les principaux systèmes de CAO ont été créés il y a quelque temps, puis optimisés comme outils de conception. La nécessité de la simulation intégrée (et en particulier la CFD) n'a été reconnue que plus tard. De plus, les outils de simulation structurelle et de CFD ont déjà une longue histoire au cours de laquelle ils ont été optimisés pour accomplir leurs tâches respectives. Il était donc logique que pendant un certain temps, le développement de la CFD continuât d'être indépendant et son interaction avec la CAO se limitait au simple échange des données. Néanmoins, en ce qui concerne l'utilisation de la CFD pendant la conception, et comme exigence de toutes les feuilles de route PLM, la nécessité d'intégrer entièrement la CFD dans la CAO devient de plus en plus pressante. A la fin des années 1990, le premier produit CFD entièrement intégré, FloWorks, renommé aujourd'hui SOLIDWORKS Flow Simulation, a été développé comme complément de SOLIDWORKS.

L'approche de SOLIDWORKS Flow Simulation est basée sur 2 principes majeurs :

- l'utilisation de la CAO native comme source d'informations géométrique ;
- la combinaison de la modélisation CFD 3D complète avec des méthodes d'ingénierie plus simples dans les cas où la résolution du maillage est insuffisante pour une simulation 3D complète.

La technologie SOLIDWORKS Flow Simulation fonctionnant au sein du système de CAO, SOLIDWORKS, intègre un certain nombre de technologies :

- la gestion des données de CAO ;
- la génération de maillage ;
- les solveurs CFD ;
- les technologies de modélisation d'ingénierie ;
- le traitement des résultats.

## 2. TRAITEMENT DES FRONTIÈRES DANS SOLIDWORKS FLOW SIMULATION

La CAO décrit le modèle volumique, tandis que la CFD s'intéresse principalement à l'espace d'écoulement (le domaine de la solution moins le modèle volumique). Historiquement, pour les codes CFD traditionnels, l'espace rempli de fluide est créé par soustraction booléenne du modèle volumique au sein du système de CAO, et ce négatif est envoyé à l'outil CFD pour maillage. Les générateurs de maillage en CFD traditionnelle sont généralement basés sur des algorithmes dits *body-fitted*. Des révisions détaillées des types de géométrie de maillage de base sont présentées dans plusieurs publications (par exemple, Weatherill et Hassan, 1994, Filipiak, 1996 et Parry et Tatchell, 2008). Dans ces travaux, il apparaît que les maillages de type *body-fitted*, c'est-à-dire qui épousent la forme de la topologie, ont été largement utilisés pour résoudre des problèmes industriels. En règle générale, lorsque les géométries sont complexes, on utilise des maillages non structurés, formés en construisant des nœuds distribués de manière irrégulière (voir Fig. 1). Lorsque les géométries maillées sont moins complexes, il est souvent possible d'utiliser des maillages structurés (voir Fig. 2), et ces deux stratégies de maillage peuvent être combinées, avec des maillages structurés dans certaines sous-régions, par exemple proches de la paroi, et des maillages non structurés partout ailleurs (voir Fig. 3). De tels maillages peuvent être qualifiés de partiellement structurés ou partiellement non structurés.

Les systèmes de CAO ont initialement été développés exclusivement pour la conception et non dans la perspective d'une simulation numérique. Une caractéristique des maillages de type *body-fitted* est qu'ils sont très sensibles à la qualité (à des fins de simulation, et pas nécessairement pour la conception) de la géométrie CAO. Généralement, de tels maillages sont générés en commençant par la génération des nœuds au niveau de la surface solide. La surface est ensuite maillée à l'aide de la triangulation de Delaunay. Après cela, le maillage volumique est généré à partir de la triangulation de surface. Il s'agit souvent d'un maillage constitué d'éléments tétraédriques qui répondent au critère de Delaunay (par exemple, Delaunay, 1934, Lawson, 1977, Watson 1981, Baker, 1989 et Weatherill et Hassan, 1994). Dans plusieurs cas, les défauts présents dans la représentation de la surface nécessitent une intervention de l'utilisateur pour résoudre les ambiguïtés afin de réparer les défauts de la géométrie CAO. De plus, dans certaines situations, un affinement exagéré au niveau de la surface peut aboutir à un nombre excessif de petits triangles. Cela peut se produire dans des zones qui ne sont pas significatives en termes de simulation d'écoulement, puisque l'algorithme de maillage répond à des fonctions géométriques (petits rayons, petites extrusions, jonction de matériaux, etc.) exigeant que l'utilisateur prenne une mesure corrective.

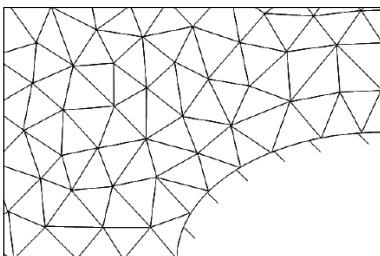


Figure 1 : maillage de type body fitted non structuré

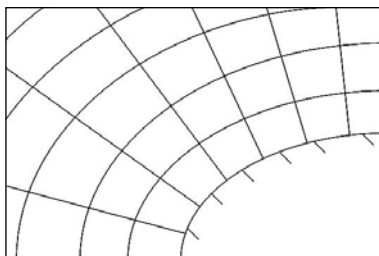


Figure 2 : maillage de type body-fitted structuré

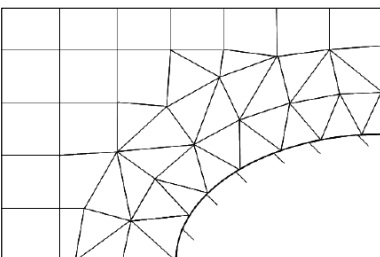


Figure 3 : combinaison d'un maillage cartésien structuré et d'un maillage de type body-fitted non structuré proche de la paroi

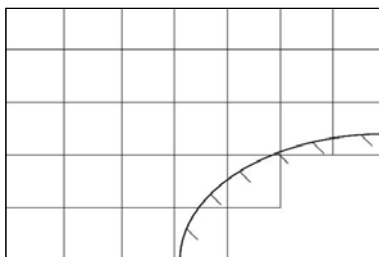


Figure 4 : maillage de type « body-immersed » structuré

L'autre approche consiste à utiliser un maillage dit « immersed-body », comme l'illustre la Fig. 4. Dans cette approche, la création du maillage commence indépendamment de la géométrie elle-même et les cellules peuvent arbitrairement rencontrer la limite entre le domaine solide et le domaine fluide. Cela permet d'utiliser un maillage cartésien qui ne peut, en général, pas être de type « body-fitted ». Un tel maillage peut être défini comme un ensemble de parallélépipèdes rectangles (cellules rectangulaires) adjacents les uns aux autres et à la limite externe du domaine de calcul, orientés selon les coordonnées cartésiennes. Les parallélépipèdes rectangles coupés par la surface (« cut-cells ») sont traités spécifiquement, comme décrit plus tard, selon les conditions aux limites définies sur la surface. Il est nécessaire de préciser que l'approche du maillage dit « immersed-body » peut être implémentée aussi bien avec des éléments tétraédriques ou d'autres types d'élément (voir Löhner et al., 2004), mais en termes de précision de l'approximation et de facilité d'implémentation, les maillages cartésiens sont de loin préférables.

Les avantages des maillages cartésiens peuvent être résumés comme suit :

- la simplicité, la vitesse et la robustesse de l'algorithme de génération du maillage, surtout lorsqu'il s'agit de données de CAO natives ;
- la minimisation des erreurs de troncature locales ;
- la robustesse du modèle différentiel.

La technologie SOLIDWORKS Flow Simulation est basée sur l'utilisation des maillages cartésiens et la technologie de maillage constitue l'un des éléments-clés de la transition CAO/CFD pour la CFD intégrée au processus de CAO.

L'utilisation des maillages cartésiens aboutit à des cellules entièrement localisées dans des corps solides (cellules solides), dans le fluide (cellules fluide) et à des cellules qui entrecoupent la limite solide-fluide (appelées « cellules partielles »). Dans le cas le plus simple, la cellule partielle est constituée de 2 volumes de contrôle (VC) : un VC fluide et un VC solide (voir Fig 5).

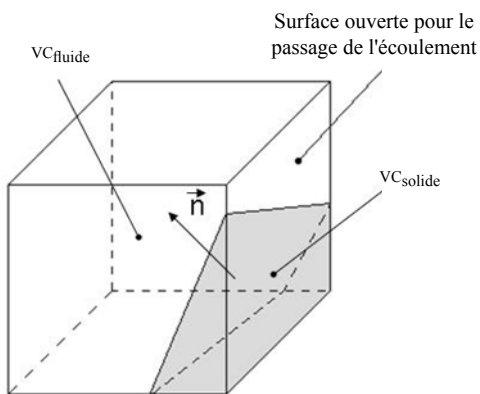


Figure 5 : cellule partielle, dans le cas le plus simple, contenant 2 volumes de contrôle (VC).

Chaque VC est entièrement solide ou entièrement fluide. Pour chaque VC, tous les paramètres géométriques nécessaires tels que le volume et les coordonnées du centre de la cellule sont calculés. Les superficies et la direction du vecteur normal sont calculées pour les faces qui délimitent le VC. Toutes ces données sont directement extraites du modèle de CAO natif. De plus, l'utilisation directe du modèle de CAO natif permet de spécifier tous les aspects de la géométrie de la cellule partielle (par exemple, les arêtes solides) – voir Fig. 6. Ici, la technologie de transition CAO/CFD tient compte des points C1 C2 sur l'arête solide afin de décrire les 2 facettes dans la représentation du maillage : A1-C1-C2-A2 et B1-C1-C2-B2 qui correspondent exactement aux 2 facettes du modèle de CAO.

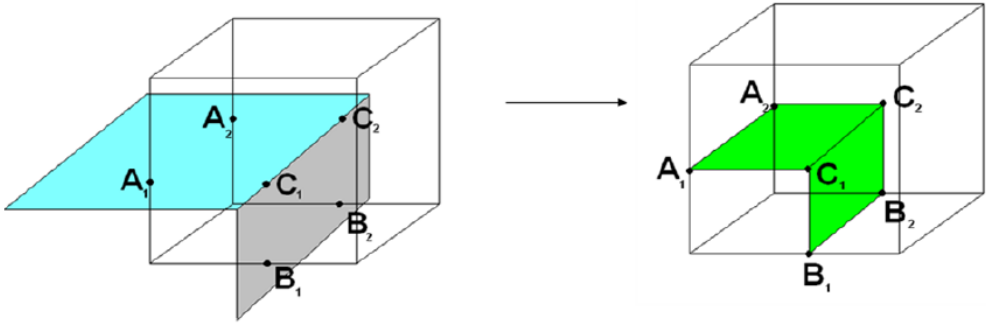


Figure 6 : représentation de la géométrie CAO (gauche) dans la cellule partielle (droite) dans le cas où 2 facettes et une arête solide sont dans une cellule.

Une telle technologie permet une bonne résolution des géométries, même en cas de maillages relativement grossiers (voir Fig. 7).

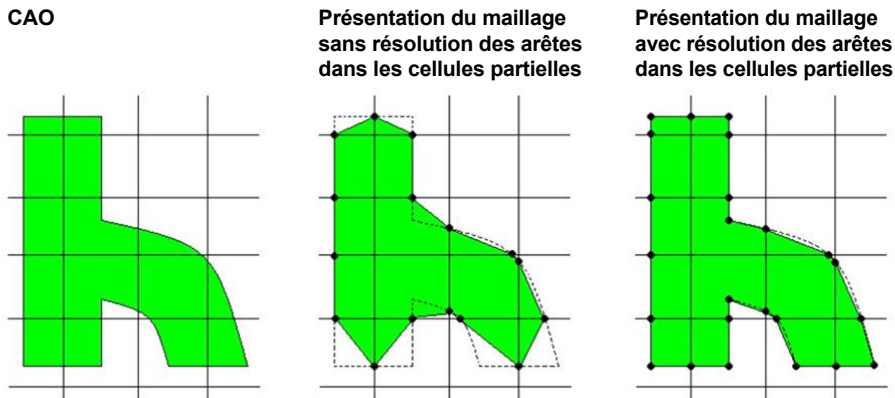


Figure 7 : représentation du maillage de la géométrie CAO avec capture des arêtes solides dans les cellules partielles.

Dans une seule cellule, il est possible d'avoir un nombre arbitraire de VC : 3 dans le cas d'une paroi mince ou plus, comme le montre la Fig. 8.

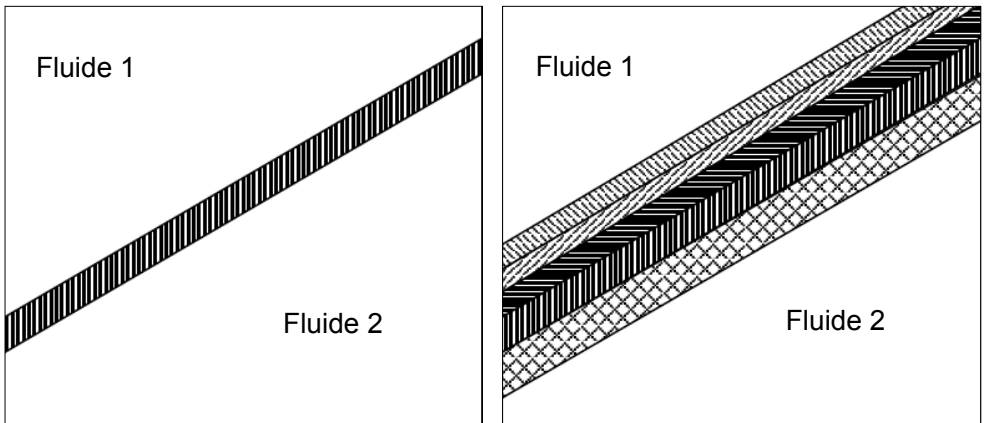


Figure 8-9 : cellule partielle avec 3 volumes de contrôle (fluide-solide-fluide) dans le cas de paroi solide mince et cellule partielle avec 7 volumes de contrôle dans le cas de paroi solide mince contenant 5 couches présentant des propriétés de matériau différentes.

Plusieurs couches de VC sont essentielles non seulement pour la modélisation de l'écoulement des fluides, mais également pour les phénomènes de transfert thermique, y compris les résistances de contact et les calculs de l'effet Joule dans un corps solide. Les VC de solides et de fluides peuvent être alternés plusieurs fois dans chaque cellule comme l'illustre la Fig. 10.

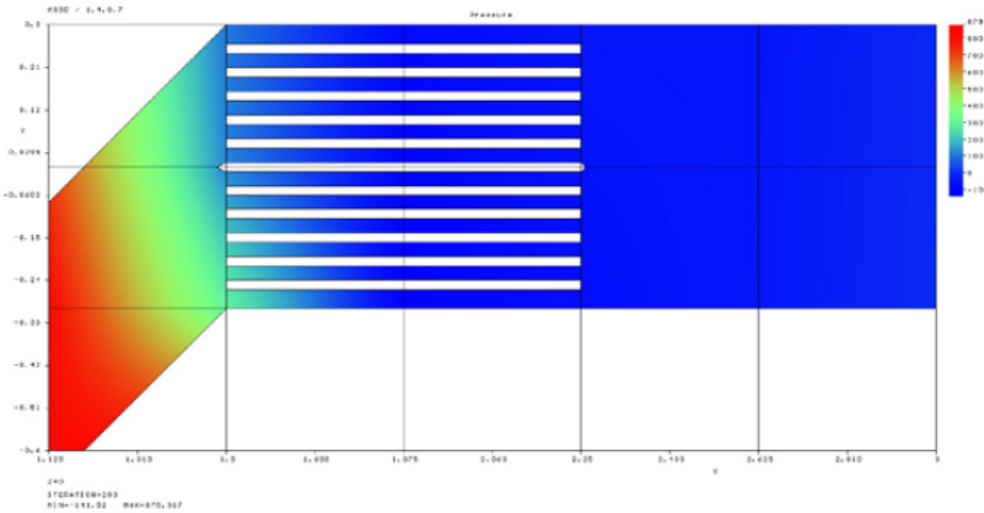


Figure 10 : volumes de contrôle multiples (solide-fluide-solide-fluide...) pour les cellules partielles.

La génération du maillage débute par la division du domaine de calcul rectangulaire en un ensemble de cellules rectangulaires (parallélépipèdes) formées par l'intersection des plans parallèles aux axes du système de coordonnées. Le maillage peut être affiné (en fractionnant chaque parallélépipède en 8 autres qui soient géométriquement similaires) en utilisant plusieurs critères d'adaptation qui peuvent être définis pour chaque corps solide (courbure, passages étroits, petits éléments, etc.) et automatiquement selon les gradients de la solution.

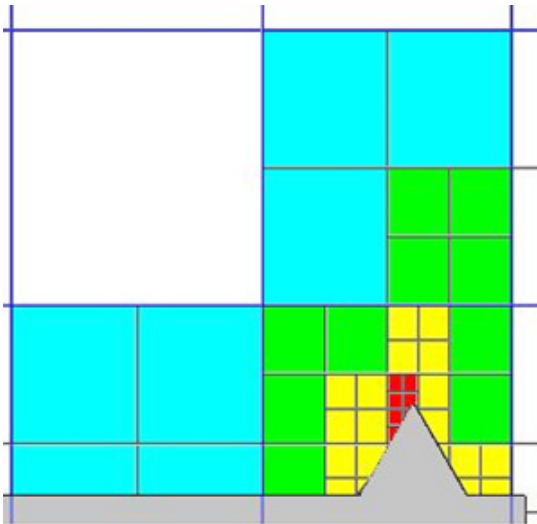


Figure 11 : maillage SOLIDWORKS Flow Simulation après raffinement.

En raison du raffinement, des cellules de niveaux de raffinement différents se forment. Il est important de noter que la différence de niveau de raffinement entre des cellules voisines, dans la technologie SOLIDWORKS Flow Simulation, n'est pas supérieure à 1 comme illustré sur la Fig. 11.

Ces procédures de raffinement sont essentielles à la résolution de la géométrie CAO telle que les surfaces avec petites courbures, les petits éléments, les passages étroits, etc. De plus, l'utilisation d'une telle technologie de génération de maillage permet d'implémenter des outils automatiques, robustes et efficaces pour le maillage. Les données d'entrée requises ne peuvent avoir que la taille de l'objet géométrique (qui peut être extrait de la CAO automatiquement), la taille du plus petit élément à résoudre et quelques informations générales relatives à la simulation (écoulement interne ou externe, choix des modèles physiques à utiliser, etc.). Il est également possible d'activer le raffinement additionnel du maillage durant le calcul, dans le but de mieux l'adapter aux singularités de la solution telles que les ondes de choc.

### 3. MODELES PHYSIQUES

En général, l'approche du maillage cartésien utilisée dans SOLIDWORKS Flow Simulation permet d'effectuer des calculs multiphysiques combinés, à l'aide d'un maillage de calcul possédant des cellules fluides, des cellules solides et des cellules partielles (multi-VC) :

- Analyse de l'écoulement de fluides pour les régions fluides ;
- Calcul du transfert de chaleur et du courant électrique direct dans des régions solides.

L'analyse de l'écoulement de fluides et la conduction thermique peuvent aussi être traitées séparément. De plus, tous ces calculs peuvent être couplés avec des modèles de radiation différents. Pour tous ces phénomènes physiques, la géométrie CAO native demeure la source d'informations géométriques initiales.

#### 1. Régions fluides

Dans les régions fluides, SOLIDWORKS Flow Simulation résout les équations de Navier-Stokes qui sont des formulations des lois relatives à la masse, au moment et à la conservation d'énergie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} + \tau_{ij}^R) + S_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j (\tau_{ij} + \tau_{ij}^R) + q_i) + \frac{\partial p}{\partial t} - \tau_{ij}^R \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho \varepsilon + S_i u_i + Q_H \quad (3)$$

$$H = h + \frac{u^2}{2}$$

Pour le calcul des écoulements compressibles à grande vitesse et les écoulements avec ondes de choc, l'équation d'énergie suivante est utilisée :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \left( E + \frac{p}{\rho} \right)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j (\tau_{ij} + \tau_{ij}^R) + q_i) - \tau_{ij}^R \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho \varepsilon + S_i u_i + Q_H \quad (4)$$

$$E = e + \frac{u^2}{2}$$

Ces équations sont complétées par les équations d'état du fluide, qui définissent la nature de ce dernier, et par les dépendances empiriques de la densité du fluide, la viscosité et la conductivité thermique par rapport à la température. Les fluides non newtoniens sont examinés en introduisant une dépendance dans laquelle leur viscosité dynamique dépend du taux de cisaillement de fluide et de la température.

Des modèles spéciaux sont utilisés pour la description des gaz réels, la condensation et la vaporisation de volume, la cavitation ainsi que pour les médias poreux.

SOLIDWORKS Flow Simulation est capable d'examiner aussi bien les écoulements laminaires que turbulents. Les écoulements laminaires apparaissent lorsque le nombre de Reynolds est faible. Ce nombre est égal au produit d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques divisé par la viscosité cinématique. Lorsque le nombre de Reynolds excède une certaine valeur critique, l'écoulement devient progressivement turbulent. Pour prévoir les écoulements turbulents, les équations dites « Favre-averaged Navier Stokes » sont utilisées lorsque les effets, moyennés dans le temps, de la turbulence de l'écoulement sur les paramètres d'écoulement sont considérés, tandis que les phénomènes à grande échelle et dépendant du temps sont pris en compte directement. A travers cette procédure, des termes supplémentaires appelés contraintes de Reynolds apparaissent dans les équations pour lesquelles des informations supplémentaires doivent être fournies. Pour ce système d'équations, SOLIDWORKS Flow Simulation emploie des équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation en utilisant le modèle  $k-\varepsilon$ .

Le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  modifié avec fonctions d'amortissement proposé par Lam et Bremhorst (1981) décrit les écoulements laminaires, turbulents et transitionnels de fluides homogènes d'après les lois de conservation de turbulence suivantes :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij}^R \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \mu_t P_B, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left( f_1 \tau_{ij}^R \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + C_B \mu_t P_B \right) - f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \quad (6)$$

$$\tau_{ij} = \mu s_{ij}, \quad \tau_{ij}^R = \mu_t s_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad s_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (7)$$

$$P_B = - \frac{g_i}{\sigma_B} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad (8)$$

où  $C_\mu = 0,09$ ;  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ;  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ;  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ;  $\sigma_B = 0,9$ ;  $C_B = 1$  si  $P_B > 0$ ,  $C_B = 0$  si  $P_B < 0$ , la viscosité turbulente est déterminée par la formule :

$$\mu_t = f_\mu \cdot \frac{C_\mu \rho k^2}{\varepsilon}, \quad (9)$$

La fonction d'amortissement de Lam et Bremhorst  $f_\mu$  est déterminée par la formule :

$$f_\mu = \left( 1 - e^{-0.025 R_y} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{20.5}{R_t} \right), \quad (10)$$

Où:

$$R_y = \frac{\rho \sqrt{k} y}{\mu}, \quad (11)$$

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}, \quad (12)$$

$y$  est la distance entre le point et la paroi et les fonctions d'amortissement de Lam et Bremhorst  $f_1$  et  $f_2$  sont obtenues par la formule :

$$f_1 = 1 + \left( \frac{0.05}{f_\mu} \right)^3, \quad f_2 = 1 - e^{-R_t^2}. \quad (13)$$

Les fonctions d'amortissement de Lam et Bremhorst  $f_\mu, f_1, f_2$  diminuent la viscosité turbulente et l'énergie de turbulence, mais augmentent le taux de dissipation de la turbulence lorsque le nombre de Reynolds  $R_y$ , basé sur la vitesse moyenne des fluctuations et la distance à partir de la paroi, devient trop petit.

Lorsque  $f_\mu = 1, f_1 = 1, f_2 = 1$  l'approche restaure le modèle  $k-\varepsilon$  original.

Le flux thermique est défini par :

$$q_i = \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{\sigma_c} \right) \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

Ici la constante  $\sigma_c = 0.9$ ;  $Pr$  est le nombre de Prandtl et  $h$  l'enthalpie thermique.

Une tâche de calcul particulière est finalement spécifiée par la définition de sa géométrie, sa frontière et ses conditions initiales. Toutes les données de telles conditions sont directement définies sur le modèle de CAO natif.

## 2. Régions solides

SOLIDWORKS Flow Simulation calcule deux types de phénomènes physiques dans les régions solides : la conduction thermique et le courant électrique direct ; l'effet Joule résultant étant une source de chaleur dans l'équation d'énergie.

Le transfert de chaleur dans les solides et les fluides avec échange d'énergie entre eux (transfert thermique combiné) est un élément essentiel et implicite d'un logiciel de CFD intégré au processus de CAO. Le transfert de chaleur dans les fluides est décrit par l'équation d'énergie (3-4) dans laquelle le flux thermique est défini par (14). Le phénomène de conduction thermique dans un support solide est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q_H \quad (15)$$

où  $e$  est l'énergie interne spécifique,  $e = c \cdot T$ ,  $c$  la chaleur spécifique,  $Q_H$  le flux de chaleur par unité de volume et  $\lambda_i$  les valeurs propres de conductivité thermique. On suppose que le tenseur de conductivité thermique est diagonal dans le système de coordonnées considéré. Pour un support isotropique  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . En présence de courant électrique,  $Q_H$  peut inclure un flux de chaleur spécifique par effet Joule  $Q_J$ . Il est exprimé par la formule  $Q_J = r \cdot j^2$ , où  $r$  est la résistivité électrique et  $j$  la densité de courant électrique. Le vecteur de densité de courant électrique :

$$\mathbf{i} = - \left( \frac{1}{r_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{1}{r_{22}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{1}{r_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \quad (16)$$

est déterminé via le potentiel électrique  $\varphi [V]$  à partir de l'équation de Laplace en régime stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r_{ii}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (17)$$

Ici  $r_{ii}$  représente la résistivité électrique dépendant de la température dans la direction de la  $i$ -ème coordonnée.

L'équation de Laplace est résolue numériquement dans les sous-domaines qui contiennent des matériaux électriquement conducteurs. Les solides diélectriques et les zones d'écoulement de fluides des sous-domaines en question sont automatiquement exclus. Le courant électrique total sur une surface  $I[A]$  ou le potentiel électrique  $\varphi[V]$  peut être spécifié par l'utilisateur comme condition aux limites pour le problème.

Une surface comprise entre deux solides électriquement conducteurs du sous-domaine est considérée comme étant de résistance nulle (par défaut) ou l'utilisateur peut y spécifier une résistance de contact électrique. La valeur de la résistance est fournie explicitement ou calculée directement à partir du matériau fourni et de son épaisseur. Une résistance de contact spécifiée sur une surface implique que le courant qui la traverse produit l'effet Joule correspondant ; ce qui génère une source de chaleur de surface comme suit :

si un solide est constitué de plusieurs matériaux solides reliés les uns aux autres, alors les résistances de contact thermique entre eux sont pris en compte lors du calcul de la conduction thermique. Par conséquent, un écart de température du solide apparaît sur les surfaces de contact. Une couche très fine d'un autre matériau compris entre les solides ou celle d'un solide en contact avec un fluide peut être prise en compte lors du calcul de la conduction thermique dans les solides de la même manière (c.-à-d. comme une résistance de contact thermique), mais est spécifiée via la conductivité thermique du matériau et l'épaisseur de la couche.

L'échange d'énergie entre le fluide et le support solide est calculé via le flux thermique dans la direction normale à l'interface solide/fluide tenant compte de la température de la surface du solide et des caractéristiques de la couche frontière du fluide, et de l'échange de chaleur de radiation si nécessaire.

### 3. Radiation entre des surfaces solides et dans des solides transparents

La radiation est un phénomène complexe et par conséquent, il y a un grand nombre de modèles simplifiés de radiation. Tous ces modèles ont des avantages, des inconvénients et des limites. SOLIDWORKS Flow Simulation offre 2 modèles :

1. « Ray tracing », aussi connu sous le nom de DTRM (Discrete Transfer Radiation Model).
2. Discrete Ordinates (ou DO).

Pour le modèle « Ray tracing », la radiation thermique des surfaces solides, émise et réflétee, est supposée être diffuse (sauf pour les surfaces radiatives symétriques et de type miroir), c.-à-d. obéissant à la loi de Lambert. D'après cette loi, l'intensité de la radiation par unité de surface et par unité d'angle solide est la même dans toutes les directions. La radiation solaire est absorbée et réfléchie par les surfaces indépendamment de la radiation thermique. La radiation thermique traverse un solide spécifié comme étant transparent aux radiations solaires uniquement, ou aux radiations thermiques issues de toutes les sources sauf les radiations solaires ou aux deux types de radiation : thermique et solaire. La réfraction peut également être prise en compte pour cette option. Les fluides n'émettent ni n'absorbent les radiations thermiques (c.-à-d. ils sont transparents aux radiations thermiques) et par conséquent, ce dernier n'affecte que les surfaces solides. Les surfaces solides radiatives non spécifiées comme étant des corps noirs ou blancs sont supposées être des corps gris idéaux, c.-à-d. elles ont un spectre de pouvoir émissif continu similaire à celui d'un corps noir. Leur émissivité monochromatique est donc indépendante de la longueur d'onde d'émission. Pour quelques matériaux remplissant certaines conditions, l'émissivité du corps gris peut dépendre de la température de la surface. La dépendance du spectre n'est pas prise en compte dans le modèle Ray tracing.

Le modèle dit « Discret Ordinates » est plus compliqué. Ici, tout le domaine directionnel  $4\pi$  dans le domaine de calcul est discrétisé en un nombre spécifié d'angles solides égaux. L'équation régissant la radiation peut être formulée comme suit :

$$\frac{dI(\vec{s}, \vec{r})}{ds} = -(\kappa + \sigma_s) \cdot I(\vec{s}, \vec{r}) + \kappa \cdot n^2 \cdot I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} \Phi(\vec{s}', \vec{s}) \cdot I(\vec{s}', \vec{r}) \cdot d\Omega' \quad (18)$$

Les solides absorbeurs de radiation (semi-transparents) absorbent et émettent la radiation thermique selon le coefficient d'absorption du matériau solide spécifié. La dispersion n'est pas prise en compte. Les surfaces de solides opaques absorbent les radiations thermiques incidentes selon leurs coefficients d'émissivité spécifiés. Le reste des radiations incidentes est réfléchi de manière spéculaire ou diffuse ou des deux manières, selon le coefficient de réflexion spéculaire spécifié. Les radiations sont réfractées selon les indices de réfraction spécifiés du solide et du support adjacent (un autre solide, absorbeur de radiations ou un solide ou un fluide transparent dont l'indice de réfraction est toujours considéré comme étant égal à 1). Le spectre de radiation est considéré être constitué de plusieurs bandes dont les arêtes sont spécifiées par l'utilisateur. Les propriétés des sources de radiation, des surfaces et des matériaux sont considérées comme étant constantes dans chaque bande.

Suite aux calculs de la radiation, les flux thermiques appropriés sont pris en compte dans les cellules partielles pour les domaines fluides-solides ou dans les cellules solides pour les corps solides semi-transparents.

#### 4 : TRAITEMENT DE LA COUCHE LIMITE

Il est clair que les maillages cartésiens dits non body-fitted sont meilleurs pour la gestion des données de CAO natives et constituent donc la base de la transition CAO/CFD. Cependant, le principal problème que posent les maillages cartésiens dits « Immersed-Body » est relatif à la résolution des couches limites pour les maillages grossiers. Pour cette raison, la technologie SOLIDWORKS Flow Simulation incorpore une approche originale décrite ci-dessous.

La combinaison de cette approche avec la technologie de maillage cartésien SOLIDWORKS Flow Simulation constitue un élément majeur de la transition CAO/CFD de SOLIDWORKS Flow Simulation.

La prise en compte des cellules proches des parois montre que pour une géométrie CAO native arbitraire, le maillage entre la limite solide/fluide peut être trop grossier pour la solution précise des équations de Navier-Stokes dans la couche limite à haut gradient. En conséquence, pour calculer le frottement de surface et le flux thermique au niveau de la paroi, l'approche de Prandtl pour les couches limites est utilisée. La principale idée de cette approche a quelques similitudes avec l'approche de la fonction de paroi traditionnellement utilisée en CFD. Le traitement de la paroi qui fait partie de la technologie de la plateforme SOLIDWORKS Flow Simulation utilise une approche nouvelle et originale, l'approche dite 2SWF (Two-Scale Wall Function) composée de deux méthodes pour coupler le calcul de la couche limite avec la résolution du flux :

1. le traitement de couche limite dite « mince » utilisé lorsque le nombre de cellules à travers la couche limite est insuffisant pour la détermination directe, ou même simplifiée, du profil du flux et des profils thermiques ;
2. et l'approche de la couche limite dite « épaisse » utilisée lorsque le nombre de cellules à travers la couche limite excède celui requis pour résoudre avec précision la couche limite.
3. Dans les cas intermédiaires, une compilation des deux approches ci-dessus est utilisée ; ce qui permet de garantir une transition aisée entre les deux modèles au fur et à mesure que le maillage est affiné ou que la couche limite s'épaissit le long d'une surface.

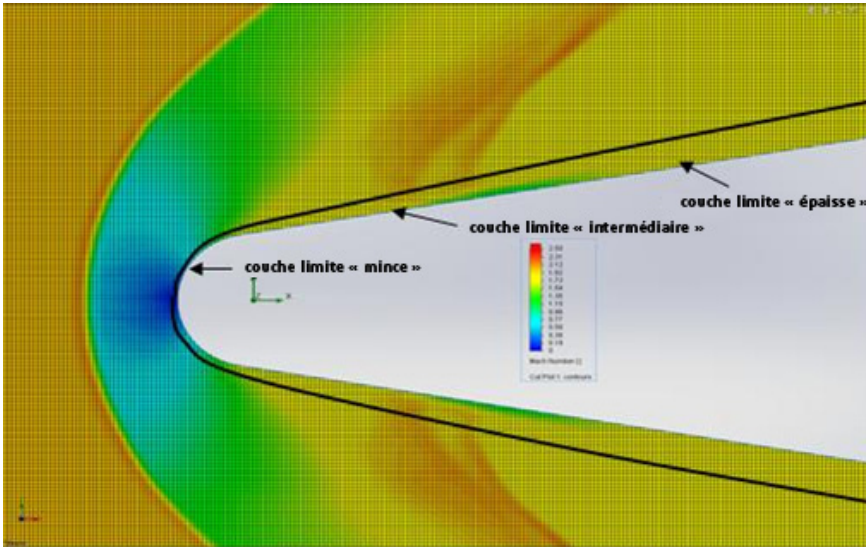


Figure 12 : champ d'écoulement du nombre de Mach avec une couche limite dite « mince », « intermédiaire » et « épaisse ».

Les vérifications du traitement de la couche limite de la technologie de SOLIDWORKS Flow Simulation ont été effectuées par Balakine et al. (2004). Ces traitements sont évoqués ci-dessous.

### 1. Approche de la couche limite dite mince

Dans cette approche, les équations de couche limite de Prandtl déjà intégrées le long de la normale à la paroi de 0 (au niveau de la paroi) à l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  sont résolues le long des lignes de courant de l'écoulement du fluide couvrant les parois. Si la couche limite est laminaire, ces équations sont résolues par la méthode des approximations successives qui est basée sur la technologie des fonctions d'essai de Shvets (Ginzburg, 1970). Si la couche limite est turbulente ou transitoire, la généralisation de cette méthode, qui emploie l'hypothèse de Van Driest relative à la longueur de mélange dans les couches limites turbulentes, est utilisée (Van Driest, 1956).

L'influence de la rugosité, considérée comme étant équivalente à celle d'un grain de sable, et la turbulence de l'écoulement externe sur la couche limite sont modélisées par les coefficients semi-empiriques qui corrigent la contrainte de cisaillement à la paroi et le flux thermique du fluide à la paroi. La compressibilité du fluide, la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence et plusieurs forces volumiques sont prises en compte par des modèles empiriques et semi-empiriques.

A partir du calcul de la couche limite, SOLIDWORKS Flow Simulation obtient l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ , la contrainte de cisaillement de la paroi  $\tau_w^e$  et le flux thermique du fluide à la paroi  $q_w^e$  qui sont utilisés comme conditions aux limites des équations de Navier-Stokes :

$$\tau_w = \tau_w^e, \quad q_w = q_w^e, \quad (19)$$

Les conditions aux limites pour  $k$  et  $\varepsilon$  sont déterminées à partir de la condition d'équilibre de la turbulence dans la cellule de maillage de calcul proche de la paroi :

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{0.75} k^{1.5}}{\kappa y}. \quad (20)$$

## 2. Approche de la couche limite dite épaisse

Lorsque le nombre de cellules à travers la couche limite est suffisant (supérieur à ~10) la simulation des couches limites laminaires est faite via les équations de Navier-Stokes dans le cadre du calcul de l'écoulement principal. Pour les couches limites turbulentes, une modification de la célèbre approche par fonction de paroi est utilisée. Cependant, au lieu de l'approche classique où le profil de vitesse logarithmique est utilisé, la technologie de SOLIDWORKS Flow Simulation utilise le profil complet proposé par Van Driest (1956) :

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2 \cdot d\eta}{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \kappa^2 \cdot \eta^2 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\eta}{A_v}\right)\right]^2}} \quad (21)$$

où  $\kappa = 0,4054$  est la constante de Karman et  $A_v = 26$  le coefficient de Van Driest.

Toutes les autres hypothèses sont similaires à l'approche classique de la fonction de paroi.

## 5. MÉTHODES NUMÉRIQUES ET EXEMPLES DE CALCUL

La région fluide représente la principale difficulté de calcul du point de vue de la complexité algorithmique et des calculs. En utilisant le modèle CAO comme source d'informations géométriques, il est essentiel de prêter une attention particulière à la robustesse et à l'efficacité des méthodes numériques utilisées.

SOLIDWORKS Flow Simulation utilise 2 types différents de solveur et d'algorithmes pour modéliser des écoulements de fluides. Le premier solveur est optimal pour les écoulements incompressibles et les écoulements avec des nombres de Mach inférieurs à 3,0. Les approximations en « Time-implicit » de la continuité et des équations de convection/diffusion (pour le moment, la température, etc.) sont utilisées avec une technique dite « operator-splitting » (voir Glowinski et Tallec, 1989, Marchuk, 1982, Samarskii, 1989, Patankar, 1980). Cette technique est utilisée pour résoudre efficacement le problème du découplage pression-vitesse. D'après l'approche de Patankar (1980), une équation de pression discrète de type elliptique est dérivée par des transformations algébriques des équations discrètes initialement dérivées pour la masse et le moment, prenant en compte les conditions aux limites de la vitesse.

Pour résoudre les systèmes asymétriques d'équations linéaires obtenues à partir des approximations du moment, des équations de température et de type de fluide, une méthode de gradient conjugué, généralisé et préconditionné, mise au point par Saad (1996), est utilisée. Une factorisation LU incomplète est utilisée pour le préconditionnement.

Pour résoudre le problème algébrique symétrique pour la correction de la pression, une procédure itérative doublement préconditionnée et originale est utilisée. Elle repose sur une méthode multigrid spécialement développée par Hackbusch (1985).

L'exemple ci-dessous s'appuie sur l'utilisation de ce premier type de solveur. Il s'agit d'un écoulement externe autour d'un avion de chasse F-16 (nombre de Mach entre 0,6 et 0,85). La géométrie est un modèle CAO natif de l'avion avec des réservoirs externes et des armements. Les écoulements lors des temps d'admission et d'échappement de la tuyère du moteur sont pris en compte.

Les calculs ont été effectués avec environ 200 000 cellules. Ce qui démontre l'efficacité de la technologie SOLIDWORKS Flow Simulation. Les résultats du calcul sont comparés avec les données du test de Nguyen, Luat T. et al. (1979).

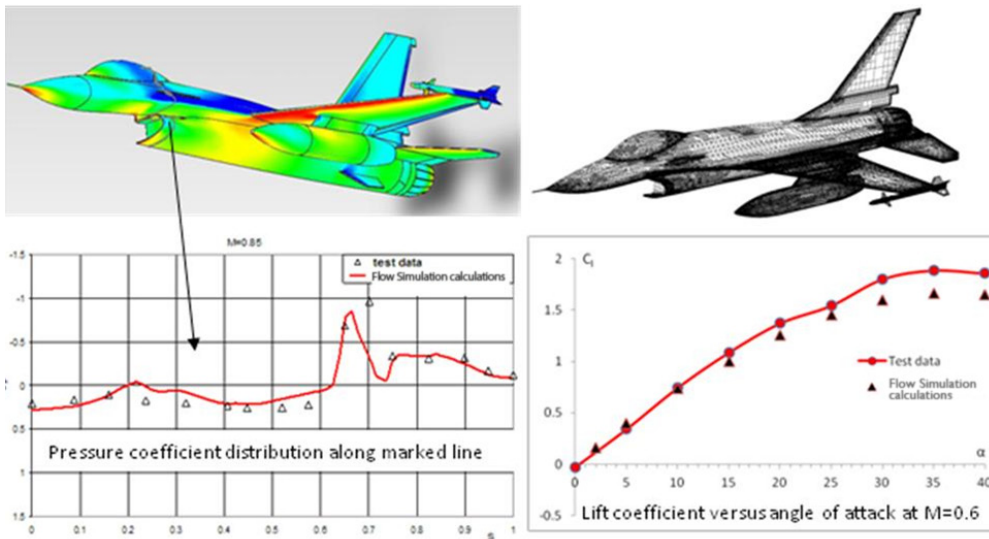


Figure 13 : calcul pour l'avion de chasse F-16).

Ce solveur est étendu par la vaste gamme de modèles physiques disponible pour SOLIDWORKS Flow Simulation comme la gravitation, la radiation, les propriétés réelles de plusieurs fluides, etc. Quelques exemples qui illustrent certaines de ces fonctionnalités sont présentés ci-dessous.

L'utilisation de la technologie SOLIDWORKS Flow Simulation comme transition CAO/CFD présente des avantages supplémentaires pour la résolution d'écoulements spécifiques dans les éléments dédiés des modèles complexes où le nombre de cellules est insuffisant pour la modélisation 3D. Puisqu'elle a directement accès aux données de CAO natives, la plateforme de la technologie SOLIDWORKS Flow Simulation peut reconnaître que certaines géométries peuvent former des passages d'écoulement étroits semblables à des tuyaux ou à des canaux fins, car cette information est disponible dans le système de CAO. Dans des cas pareils, des données analytiques ou empiriques sont utilisées pour remplacer la modélisation 3D de l'équation de Navier-Stokes dans de tels passages d'écoulement. Dans la Fig. 14 une telle approche est présentée pour l'écoulement dans un dissipateur de chaleur à ailettes.

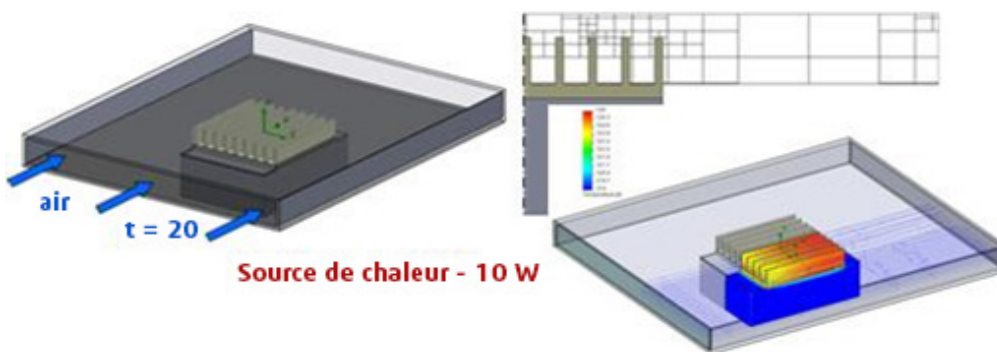


Figure 14 : calcul de SOLIDWORKS Flow Simulation à l'aide de la technologie « Thin Channel » (passage étroit).

Ici, la technologie du passage étroit sus-mentionnée est utilisée où le nombre de cellules à travers le passage est égal à 1-2. Les résultats du calcul de SOLIDWORKS Flow Simulation pour un maillage grossier (3900 cellules au total) et pour un maillage relativement fin (180 000 cellules au total), et leur comparaison avec les données expérimentales de Jonsson et Palm (1998), sont présentés dans le Tableau 1.

Vitesse d'écoulement	0,9 m/s		1,3 m/s		1,6 m/s		1,9 m/s		
$R_{texp}$ K/W	3,72		3,20		2,91		2,69		
Nombre de cellules	3 900	180 000	3 900	180 000	3 900	180 000	3 900	180 000	
$R_{tcalc}$ K/W	3,714	3,77	3,213	3,22	2,969	2,93	2,78	2,70	
	6, %	0,2	1,3	0,4	0,6	2	0,7	3,3	0,3

Tableau 1 : résultats du calcul de SOLIDWORKS Flow Simulation à l'aide de l'approche du « passage étroit » (3900 cellules), de l'approche 3D complète (180 000 cellules) et leur différence par rapport à l'expérience.

Calcul d'un appareil de climatisation contenant du Freon R22 comme fluide de travail montre les avantages de la même approche pour un modèle beaucoup plus complexe (voir Fig 15).

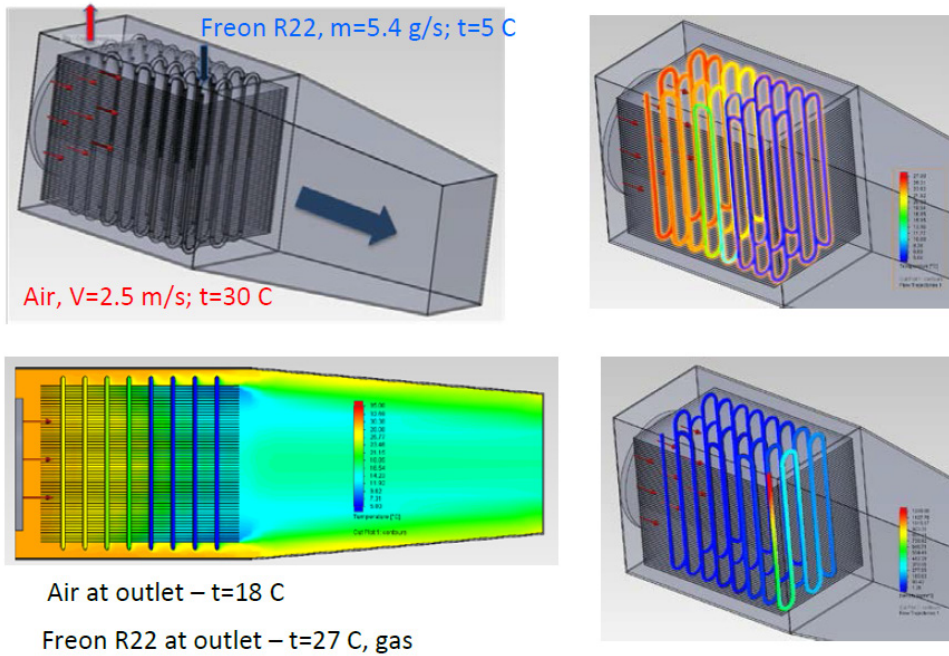


Figure 15 : simulation d'une opération de climatisation

Dans ce cas, l'échange de chaleur dans le solide et les processus de changement de phase dans le Freon sont tous pris en compte.

Le deuxième solveur récemment proposé dans SOLIDWORKS Flow Simulation est utilisé pour le calcul des écoulements dans les liquides avec cavitation et utilisant une approche numérique essentiellement à la nouvelle pour la CFD (voir Alexandikova et al., 2011). Le phénomène de la cavitation présente beaucoup de difficultés numériques relatives aux variations de densité, vitesse du son et durée. La vitesse du son peut chuter de plusieurs milliers de mètres par seconde dans un écoulement de liquide à l'ordre de dix ou moins dans un écoulement de vapeur. Cela peut aboutir à des écoulements supersoniques avec des nombres de Mach élevés, parfois avec des ondes de chocs. Les problèmes de cavitation sont ainsi caractérisés par une large gamme de nombres de Mach qui tendent de zéro à plusieurs dizaines dans un seul domaine de calcul. Par conséquent, lors de la construction d'une méthode numérique permettant de simuler les écoulements avec cavitation, il est important de tenir compte du fait que les régions d'écoulement incompressible et celles d'écoulement hautement compressible coexistent dans le domaine de calcul.

A ce jour, il y a deux principales approches pour calculer de tels écoulements compressibles englobant toutes les vitesses. La première emploie des méthodes « basées sur la densité » initialement développées pour simuler les vitesses d'écoulement compressibles. Ces méthodes sont adaptées aux faibles nombres de Mach en introduisant une compressibilité artificielle ou en utilisant certaines techniques de préconditionnement (Kunz et al., 2000, Lee et al., 2006, 2007).

La seconde utilise des méthodes « basées sur la pression », initialement développées pour les écoulements incompressibles. En général, ces approches constituent la famille dite « SIMPLE » des modèles de dérivation (ou les méthodes de « correction de la pression ») et sont adaptées aux cas impliquant des écoulements compressibles à grande vitesse (van der Heul et al., 2000).

L'approche de SOLIDWORKS Flow Simulation est différente des deux précédentes. De prime abord, la tendance à appliquer l'approche « basée sur la pression » dans les régions d'écoulement incompressible et celle « basée sur la densité » dans les régions d'écoulement compressible supersonique semble assez naturelle. Mais le couplage de ces deux approches n'est pas évident. Nous proposons un moyen, permettant de combiner ces approches, qui repose sur la simple idée fondamentale suivante : en employant la méthode des volumes finis, nous proposons de mélanger les écoulements et les approximations de pression qui correspondent aux approches « basée sur la pression » et « basée sur la densité » sur les faces des volumes de contrôle. Après cela, ces approximations mélangées sont substituées dans un modèle de dérivation de type SIMPLE. En gérant le poids de mélange entre les écoulements et l'approximation de pression, nous pouvons obtenir le modèle original de fractionnement semi-implicite de type SIMPLE, le modèle « basé sur la densité » ou un mélange de ces deux approches.

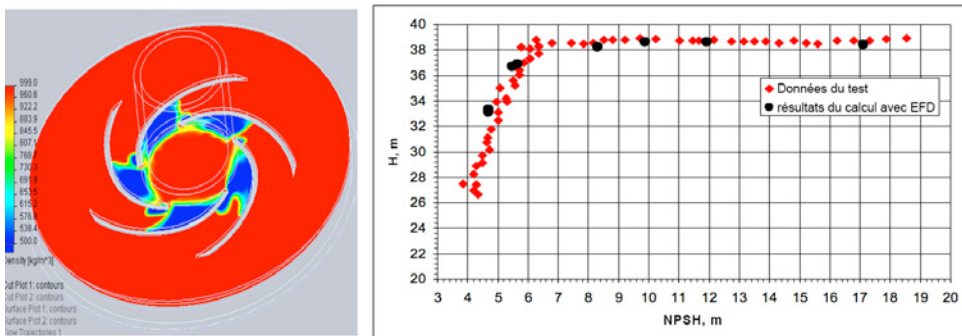


Figure 16. Calcul de la cavitation dans une pompe centrifuge.

La Figure 16 montre un exemple d'écoulement dans une pompe centrifuge, avec cavitation capturée en utilisant ce solveur hybride. Les résultats du calcul de SOLIDWORKS Flow Simulation sont comparés aux données expérimentales de Hofman et al. (2001).

## 6. CONCLUSIONS

Les tendances du marché mondial de la simulation montrent clairement une croissance constante dans les parts de marché relatives aux calculs de CFD dans la résolution des problèmes actuels liés à la conception. Dans ce marché, SOLIDWORKS Flow Simulation est un exemple innovant d'adaptation à la technologie de simulation actuelle (à savoir la dynamique des fluides et le transfert de chaleur) pour répondre aux besoins quotidiens des ingénieurs en conception.

L'EFD (Engineering Fluid Dynamics) est composée des technologies suivantes : la gestion des données de CAO, le générateur de maillages cartésiens, un ensemble de solveurs CFD, des technologies de modélisation d'ingénierie et le traitement des résultats. Une telle plateforme devient une passerelle et une transition complète entre la CAO et la CFD.

La technologie EFD est basée sur les principes fondamentaux suivants :

- La technologie de maillage cartésien qui s'occupe directement de la géométrie CAO native complexe et arbitraire ;
- La technologie du traitement de la couche limite qui permet d'effectuer des calculs d'écoulements de fluides sur des maillages cartésiens relativement grossiers. Cette technologie est basée sur une approche de fonction de paroi entièrement évolutive pour définir le frottement superficiel et les écoulements thermiques au niveau des parois solides ;
- Les modèles d'ingénierie employés lorsque le maillage de calcul n'est pas suffisamment fin pour une modélisation 3D complète.

Le document présente des exemples de calcul utilisant des solveurs CFD employés dans SOLIDWORKS Flow Simulation : un solveur implicite pour des écoulements incompressibles et des écoulements compressibles faibles et un solveur hybride pour les écoulements de liquides avec cavitation ; ce qui démontre la grande efficacité de la simulation et la haute précision de la technologie EFD. Cette combinaison de bonnes performances pour des maillages relativement grossiers, de fonctionnalité intégrée au processus de CAO, de haut niveau d'automatisation et de convivialité en ce qui concerne la configuration du modèle, le maillage et la solution font de SOLIDWORKS Flow Simulation un outil de CFD efficace pour l'analyse au service de la conception technique.

## REFERENCES

- Alexandrikova T., Pavlov A., Streltsov V. (2011) Hybrid density- and pressure-based splitting scheme for cavitating flows simulation, *Computational Methods in Multiphase Flow VI*, Editeurs : A.A. Mammoli, C.A. Brebbia, WIT Transactions on Engineering Sciences, Vol. 70, p. 41-56, WIT Press, 2011, ISBN: 978-1-84564-518-2.
- Baker, T.J. (1989) Automatic Mesh Generation for Complex Three-Dimensional Regions Using a Constrained Delaunay Triangulation, *Engineering with Computers*, Vol. 5, p. 161-175.
- Balakin, V., Churbanov, A., Gavrioliouk, V., Makarov, M. et Pavlov A. (2004) Verification and Validation of EFD.Lab Code for Predicting Heat and Fluid Flow, *Proceedings of ICHMT International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, Norvège*, 19-24 avril 2004.
- Delaunay, B.N. (1934) Sur la Sphère Vide. *Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, Vol. 7 p. 793-800.
- Filipiak, M. (1996) *Mesh Generation*, Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh, Version 1.0, novembre 1996.
- Ginzburg, I.P. (1970) *Theory of Drag and Heat Transfer*. Léningrad, LGU (en russe).
- Gaitonde D., Shang J.S. (1993) Accuracy of flux – split algorithms in high – speed viscous flows, *AIAA Journal*, Vol.31 No. 7 p. 1215-1221.
- Gavrioliouk, V.N. Denisov, O.P. Nakonechny, V.P. Odintsov, E.V. Sergienko, A.A. Sobachkin, A.A. (1993) Numerical Simulation of Working Processes in Rocket Engine Combustion Chamber, *44th Congress of the international Astronautical Federation*, IAFF-93-S.2.463, 16-22 octobre, Graz, Autriche.
- Glowinski, R. et P. Le Tallec (1989) *Augmented Lagrangian Methods and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM, Philadelphie.
- Hackbusch, W. (1985) *Multi-grid Methods and Applications*, Springer-Verlag, New-York, Etats-Unis.
- Hofman M., Stoffel D., Coutier-Delgosha O., Fortes-Platella R., Reboud JI. (2001) *Experimental and numerical studies on a centrifugal pump with 2D-curved blades in cavitation condition*, CAV2001:session B7.005.
- Jonsson, H. et B. Palm, (1998) Thermal and Hydraulic Behavior of Plate Fin and Strip Fin Heat Sinks under Varying Bypass Conditions, *Proc. 1998 InterSociety Conf. on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITHERM '98)*, IEEE, p. 96-103, ISBN 0.7803-4475-8.
- Kunz R., Boger D., Stinebring D., Thomas S. Chyczewski, Lindau J., Gibeling H., Venkateswaran S., Govindan T. (2000) A preconditioned Navier-Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction, *Computers & Fluids*, Volume 29, numéro 8, 31 août 2000, Pages 849-875.
- Lam, C.K.G. et Bremhorst, K.A. (1981) Modified Form of Model for Predicting Wall Turbulence, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol.103, p. 456-460.
- Lawson, C.L. (1977) Software for C1 Surface Interpolation, *Mathematical Software III*, p. 161-194.
- Li Ding, Charles L. Merkle (2006) A unified framework for incompressible and compressible fluid flows, *Journal of Hydrodynamics*, Ser. B, Volume 18, numéro 3, supplément 1, Proceedings of the Conference of Global Chinese Scholars on Hydrodynamics, juillet 2006, Pages 113-119
- Li Ding, Xia Guoping, Merkle Charles L. (2007) Consistent properties reconstruction on adaptive Cartesian meshes for complex fluids computations, *Journal of Computational Physics*, Volume 225, numéro 1, 1er juillet 2007, Pages 1175-1197

- Lohner, R. Cebal, J. Castro, M. Baum, J.D. Luo, H. Mestreau, E. et Soto, O. (2004) Adaptive Embedded Unstructured Grid Methods, *Mecanica Computacional*, Vol. XXIII, p. 29-42, G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.), Bariloche, Argentine, Novembre.
- Marchuk, G.I. (1982) *Methods of Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mentor Graphics (2011a) Advanced Immersed Boundary Cartesian Meshing Technology in FloEFD™, MGC 02-11, TECH9690-w, Mentor Graphics Corporation, 2011.
- Mentor Graphics (2011b) Enhanced Turbulence Modeling in FloEFD™, MGC 02-11, TECH9670-w, Mentor Graphics Corporation, 2011.
- Nguyen, Luat T. et al. (1979) Simulator Study of Stall/Post – Stall Characteristics of a Fighter Airplane with Relaxed Longitudinal State Stability, *NASA Technical Paper 1538*, déc. 1979.
- Parry, J. et Tatchell, D. (2008) Flomerics' EFD Meshing Technology: A White Paper, Flomerics Ltd.
- Patankar, S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D.C.
- Saad, Y. (1996) *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, Boston.
- Samarskii, A.A. (1989) *Theory of Difference Schemes*, Nauka, Moscou (en russe).
- Sayre A.N. Lallemand, J. Dugue, R. Weber (1994) Scaling Characteristics of Aerodynamics and Low-NOx Properties of Industrial Natural Gas Burners, *The SCALING 400 Study, Part IV : The 300 kW BERL Test Results*, IFRF Doc No F40/y/11, International Flame Research Foundation, Pays-Bas.
- Watson, D.F. (1981) Computing the Delaunay Tesselation with Application to Voronoi Polytopes. *The Computer Journal*, Vol. 24(2) p. 167-172.
- Van der Heul D.R., Vuik C., Wesseling P. (2002) A conservative pressure-correction method for flow at all speeds. J.M. Burgers Center, Department of Applied Mathematical Analysis, Faculty of Information Technology and System, Delft University of Technology, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, Pays-Bas, 2002.
- Van der Heul Duncan R., Vuik C. et Wesseling P. (2000), Efficient computation of flow with cavitation by compressible pressure, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000.
- Van Driest, E.R. (1956) On Turbulent Flow Near a Wall, *Journal of the Aeronautical Science*, Vol. 23, No. 10, p. 1007.
- Weatherill N.P. et Hassan O. (1994) Efficient Three-dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 37, numéro 12, p 2005–2039, 30 juin 1994.

## Au service de 12 industries, la plate-forme 3DEXPERIENCE® dynamise nos applications de marque et propose une vaste gamme de solutions industrielles.

Dassault Systèmes, « The 3DEXPERIENCE Company », offre aux entreprises et aux particuliers les univers virtuels nécessaires à la conception d'innovations éco-responsables. Ses solutions leaders sur le marché transforment la façon dont les produits sont conçus, fabriqués et maintenus. Les solutions collaboratives de Dassault Systèmes permettent de promouvoir l'innovation sociale et offrent de nouvelles possibilités d'améliorer le monde réel grâce aux univers virtuels. Le groupe apporte de la valeur à plus de 170 000 clients issus de tous les secteurs, toutes tailles confondues, dans plus de 140 pays. Pour plus d'informations, consultez le site [www.3ds.com/fr](http://www.3ds.com/fr).



| The 3DEXPERIENCE Company\*

**Amériques**  
Dassault Systèmes  
175 Wyman Street  
Waltham, Massachusetts  
02451-1223  
Etats-Unis

**Europe/Moyen-Orient/Afrique**  
Dassault Systèmes  
10, rue Marcel Dassault  
CS 40501  
78946 Vélizy-Villacoublay Cedex  
France

**Bureau français**  
+33 (0)1-61-62-73-61  
[infofrance@solidworks.com](mailto:infofrance@solidworks.com)